ENS PARIS (c)

Groupe E/S

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On note $\mathscr{S}_+(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs ou nuls de série sommable. On définit :

$$\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{\mu \in \mathscr{S}_+(\mathbb{N}) : \sum_{k \geqslant 0} \mu(k) = 1\}.$$

C'est-à-dire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$.

PRÉLIMINAIRES.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $\mu(k)\, s^k$ est supérieur ou égal à 1 lorsque $\mu \in \mathscr{S}_+(\mathbb{N})$.

   Pour tout élément μ de $\mathscr{S}_+(\mathbb{N})$, on appelle fonction génératrice de μ et on note G_μ l'application définie sur $[0, 1]$ par :

$$G_\mu(s) = \sum_{k \geqslant 0} \mu(k)\, s^k.$$

2. Cette fonction justifie son qualificatif de « génératrice » par le fait qu'elle caractérise μ. Plus précisément démontrer que si μ et ν sont deux éléments de $\mathscr{S}_+(\mathbb{N})$ tels que $G_\mu(s) = G_\nu(s)$ pour tout $s \in]0, 1[$ alors $\mu = \nu$.

   Lorsque X est une variable aléatoire de loi $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire que $\mu(k)$ est la probabilité que X prenne la valeur k) on dira aussi que G_μ est la fonction génératrice de X.

Tournez la page S.V.P.

ENS PARIS E|S (c)

I

A

Soit μ un élément de $\mathcal{S}_+(\mathbb{N})$.

1. Prouver que pour tout $s \in [0, 1]$ et tout entier n on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mu(k)\, s^k \leqslant G_\mu(s) \leqslant G_\mu(1).$$

2. En déduire que G_μ est continue sur $[0, 1]$ puis que $G_\mu([0, 1])$ est inclus dans $[0, 1]$ lorsque μ est une loi de probabilité.

3. *a.* On suppose que la série de terme général $k\mu(k)$ est convergente. On note m la somme de cette série. Prouver que $G'_\mu(s)$ converge vers m lorsque s tend vers 1 par valeurs inférieures. Montrer que G_μ admet m pour dérivée à gauche au point 1.

   b. Réciproquement, montrer que si $G'_\mu(s)$ admet une limite finie lorsque s tend vers 1 par valeurs inférieures alors la série de terme général $k\mu(k)$ est convergente et de somme égale à cette limite.

4. Calculer G_μ dans les cas suivants :

   a. μ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$;

   b. μ est la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$;

   c. μ est la loi géométrique $\mathcal{G}(b, c)$, c'est-à-dire que :

$$\mu(0) = 1 - \frac{b}{(1-c)}, \quad \mu(k) = bc^{k-1} \quad \forall k \geqslant 1$$

   où b et c sont des nombres réels strictement positifs tels que $b + c < 1$.

B

Soit $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$, une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1. On suppose que pour chaque entier k la suite $(\mu_n(k))_{n \geqslant 0}$ est convergente et on note $\mu(k)$ sa limite. On note alors μ la suite $(\mu(k))_{k \geqslant 0}$.

   a. Prouver que $\mu \in \mathcal{S}_+(\mathbb{N})$ et que $\sum_{k \geqslant 0} \mu(k) \leqslant 1$.

   b. μ est-elle une probabilité ?

   c. Montrer que pour chaque $s \in]0, 1[$, $G_{\mu_n}(s)$ converge vers $G_\mu(s)$ lorsque n tend vers l'infini.

   Réciproquement, on suppose à présent que pour chaque $s \in]0, 1[$, $G_{\mu_n}(s)$ converge vers une limite qu'on note $G(s)$ lorsque n tend vers l'infini. On veut démontrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{S}_+(\mathbb{N})$ tel que $\mu_n(k)$ converge vers $\mu(k)$ pour tout entier k et $G_\mu(s) = G(s)$ pour tout $s \in]0, 1[$.

2. *a.* Prouver que G est croissante. Montrer que $G(s)$ admet une limite finie notée $\mu(0)$ lorsque s tend vers 0 par valeurs supérieures.

   b. Prouver que :

$$-\frac{s}{1-s} + G_{\mu_n}(s) \leqslant \mu_n(0) \leqslant G_{\mu_n}(s), \quad \forall s \in]0, 1[.$$

   En déduire que $\mu_n(0)$ tend vers $\mu(0)$ lorsque n tend vers l'infini.

ENS PARIS E|S (C)

3. Pour tout entier r, on définit la fonction $\Delta_{n,r}$ sur $]0, 1[$ par :

$$\Delta_{n,r}(s) = s^{-r-1}\left(G_{\mu_n}(s) - \sum_{k=0}^{r} \mu_n(k)\, s^k\right). \quad \forall s \in]0, 1[.$$

a. Prouver que $\Delta_{n,r}$ est une fonction croissante.

b. Prouver que :

$$-\frac{s}{1-s} + \Delta_{n,r}(s) \leqslant \mu_n(r+1) \leqslant \Delta_{n,r}(s), \forall s \in]0, 1[.$$

c. Conclure en raisonnant par récurrence.

II

A

Soit $(X_j)_{j \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes (c'est-à-dire que pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, $\{X_j, j \in J\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes). On suppose que pour tout entier j non nul les variables X_j sont à valeurs entières et suivent la même loi μ. X_0 prend également ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et on note ν sa loi de probabilité. On définit la suite de variables $(S_n)_{n \geqslant 0}$ par les relations de récurrence suivantes :

$$S_0 = 0, S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \; \forall n \geqslant 0.$$

1. *a.* Quelle est la fonction génératrice de S_n ?

   b. Prouver que S_{X_0} a pour fonction génératrice $G_\nu \circ G_\mu$.

2. Lorsque μ est la loi de Bernoulli de paramètre p, expliciter la loi de S_{X_0} dans les deux cas suivants :

   a. ν est la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$;

   b. ν est la loi géométrique $\mathcal{G}(b, c)$.

B

Soit b, c deux nombres réels strictement positifs tels que $b + c < 1$. On considère la fonction homographique f définie par :

$$f(x) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bx}{1-cx}, \quad \forall x \in [0, 1/c[.$$

1. *a.* Vérifier que pour tout couple (x, y) de points distincts de $[0, 1/c[$, on a l'identité :

$$\frac{x-y}{f(x)-f(y)} = \frac{(1-cx)(1-cy)}{b}.$$

   b. Calculer $f'(1)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$. En particulier discuter suivant $f'(1)$ le nombre de solutions de cette équation et la position des solutions par rapport au point 1.

3. Lorsque $f'(1) \neq 1$, montrer qu'il existe un unique point $p(b, c) \in [0, 1/c[$ tel que :

$$(1 - f(x))(p(b, c) - x) = f'(1)(1 - x)(p(b, c) - f(x)), \quad \forall x \in [0, 1/c[.$$

4. Lorsque $f'(1) = 1$, prouver que pour tout $x \in [0, 1/c[$, $x \neq 1$, on a :

$$\frac{1}{1-f(x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{c}{1-c}.$$

Tournez la page S.V.P.

ENS PARIS EIS (C)

III

On étudie dans cette partie le problème suivant : le nom de famille est hérité par les seuls fils. Supposons que chaque individu possède une certaine probabilité d'avoir k descendants mâles. À partir d'un ancêtre (appelons-le « Adams » par exemple) découlent les première, deuxième, n-ième, ... générations de descendants mâles (portant donc tous le nom d'Adams). On souhaite avoir des indications sur la loi de probabilité du nombre Z_n de descendants mâles à la n-ième génération et plus particulièrement sur la probabilité que le nom de famille s'éteigne au bout d'un certain nombre de générations.

A

On fait l'hypothèse que chacun des membres d'une même génération donne naissance, indépendamment des autres, à k fils avec la probabilité $\mu(k)$; la loi de reproduction μ ainsi définie étant identique à chaque génération.

1. Critiquer ce modèle.

2. On pose $Z_0 = 1$. On note G^n la fonction génératrice de Z_n. Prouver que $G^{n+1} = G_\mu \circ G^n$ pour tout entier n, où $G^0(s) = s \; \forall s \in [0, 1]$.

3. On suppose que la série de terme général $k\mu(k)$ est convergente. On note m la somme de cette série. Montrer que l'espérance de Z_n est finie et la calculer en fonction de m et n.

B

On suppose à présent que μ est la loi géométrique $\mathcal{G}(b, c)$. On rappelle que $p(b, c)$ est défini en II.B.3.

1. *a.* Calculer la moyenne $m(b, c)$ de μ.
   Établir que pour tout $s \in [0, 1[$, on a pour tout entier n :

   b. lorsque $m(b, c) \neq 1$:
   $$(1 - G^n(s))(p(b, c) - s) = m^n(1 - s)(p(b, c) - G^n(s)).$$

   c. lorsque $m(b, c) = 1$:
   $$\frac{1}{1 - G^n(s)} = \frac{nc}{1 - c} + \frac{1}{1 - s}.$$

2. En déduire l'expression de G^n puis de la probabilité d'extinction avant la n-ième génération, c'est-à-dire $P(Z_n = 0)$.

3. *a.* Montrer que $P(Z_n = 0)$ tend vers $p(b, c)$ quand n tend vers l'infini lorsque $m(b, c) > 1$ et que $P(Z_n = 0)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini lorsque $m(b, c) \leqslant 1$.

   b. Soit k un entier non nul, quel est le comportement de $P(Z_n = k)$ lorsque n tend vers l'infini ? Interprétation.

4. Il se trouve que les paramètres $b = 0.2126$ et $c = 0{,}5893$ correspondent bien à la réalité aux États-Unis. Calculer dans ce cas $p(b, c)$ et $m(b, c)$. Quelle est la probabilité pour que le nom d'Adams s'éteigne :

   a. en au plus cinq générations ?

   b. un jour ou l'autre ?

   Le nom d'Adams précisément est très répandu aux États-Unis. Cela contredit-il l'étude ci-dessus ?